

Диагностическая работа для поступающих в
девятый класс

Математической Вертикали

(Демоверсия)

В каждой задаче необходимо записать полное подробное решение

1. Решите неравенство: $4(x - 2) \leq 1 - 3(5 - 2x)$

2. Доход предприятия каждый год увеличивался на один и тот же процент и за 2 года увеличился с 20 000 млн. рублей до 28 800 млн. рублей. Найдите ежегодный процент роста дохода предприятия.

3. Найдите все значения p , при каждом из которых уравнение $(p + 3)x^2 - 8x + p - 3 = 0$ имеет один корень.

4. Моторная лодка проплыла 8 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 54 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 18 км/ч.

5. Правильный игральный кубик бросают дважды. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 8?

6. В отделе работают 10 сотрудников. Самому высокооплачиваемому сотруднику повысили зарплату на 12 900 рублей, а самому низкооплачиваемому понизили на 2 100 рублей.
 - а) Как изменилась медианная зарплата?
 - б) Как изменился размах зарплаты?
 - в) Как изменилась средняя зарплата (среднее арифметическое)?

7. Треугольник со сторонами 36, 48, 64 подобен треугольнику со сторонами 18, 24, x . Чему может быть равен x ? (Найти все варианты и доказать, что других нет).

8. Высота BH параллелограмма $ABCD$, проведенная к стороне AD , равна 8 и делит эту сторону на отрезки $AH = 6$ и $HD = 7$. Найдите сторону CD и площадь треугольника BCD .

Решения

1. Решите неравенство: $4(x - 2) \leq 1 - 3(5 - 2x)$

$$\begin{aligned}4(x - 2) &\leq 1 - 3(5 - 2x) \\4x - 8 &\leq 1 - 15 + 6x \\-8 - 1 + 15 &\leq 6x - 4x \\6 &\leq 2x \\3 &\leq x \\x &\geq 3\end{aligned}$$

Ответ: $x \in [3; +\infty)$

2. Доход предприятия каждый год увеличивался на один и тот же процент и за 2 года увеличился с 20 000 млн. рублей до 28 800 млн. рублей. Найдите ежегодный процент роста дохода предприятия.

Обозначим за x ежегодный процент роста дохода предприятия. Тогда через 1 год доход станет: $20000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$, а через 2 года: $20000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2$ млн рублей.

По условию можно составить уравнение и решить его:

$$\begin{aligned}20000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 &= 28800 \\ \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 &= 28800 : 20000 \\ \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 &= 1,44 \\ \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{x}{100} = 1,2 \\ 1 + \frac{x}{100} = -1,2 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \frac{x}{100} = 0,2 \\ \frac{x}{100} = -2,2 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = -220 \end{array} \right.\end{aligned}$$

Число -220 не подходит по смыслу задачи, значит, ответ 20.

Ответ: 20.

3. Найдите все значения p , при каждом из которых уравнение $(p + 3)x^2 - 8x + p - 3 = 0$ имеет один корень.

1) Рассмотрим случай, когда коэффициент при x равен нулю (в этом случае уравнение не будет квадратным). $p + 3 = 0$, то есть $p = -3$. В этом случае уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}-8x - 3 - 3 &= 0 \\ -8x &= 6\end{aligned}$$

$$x = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

То есть уравнение действительно имеет один корень при $p = -3$

- 2) Теперь рассмотрим случай $p \neq -3$ (в этом случае уравнение уже будет квадратным). Чтобы квадратное уравнение имело один корень, необходимо, чтобы его дискриминант был равен нулю.

$$\begin{aligned} D &= (-8)^2 - 4(p+3)(p-3) = 0 \\ 64 - 4(p^2 - 9) &= 0 \\ p^2 - 9 &= 16 \\ p^2 &= 25 \\ p &= \pm 5 \end{aligned}$$

Эти числа удовлетворяют условию $p \neq -3$, поэтому идут в ответ.

Ответ: $-3; \pm 5$.

4. Моторная лодка проплыла 8 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 54 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 18 км/ч.

Пусть x км/ч – скорость течения реки.

Тогда скорость по течению: $x + 18$ км/ч, а скорость против течения: $18 - x$ км/ч.

Время, потраченное на путь по течению: $\frac{8}{18+x}$ ч, а время на путь против течения: $\frac{8}{18-x}$ ч

Итоговое время составляет 54 минуты, то есть $\frac{9}{10}$ ч. Составим уравнение по условию:

$$\frac{8}{18+x} + \frac{8}{18-x} = \frac{9}{10}$$

Для решения домножим обе части на $10(18+x)(18-x)$. ОДЗ: $x \neq \pm 18$

$$80(18-x) + 80(18+x) = 9(18+x)(18-x)$$

$$80 \cdot 18 - 80x + 80 \cdot 18 + 80x = 9(324 - x^2)$$

$$2 \cdot 80 \cdot 18 = 9(324 - x^2)$$

$$2 \cdot 80 \cdot 2 = 324 - x^2$$

$$320 = 324 - x^2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ, но число -2 не подходит по смыслу задачи, значит, ответ 2.

Ответ: 2 км/ч.

5. Правильный игральный кубик бросают дважды. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 8?

Всего $6 \cdot 6 = 36$ возможных исходов при бросании двух игральных кубиков. Рассмотрим «благоприятные» события, то есть значения очков на кубиках, при которых сумма равна 8.

$2 + 6; 6 + 2; 3 + 5; 5 + 3; 4 + 4$ – всего 5 исходов. Ответ: $\frac{5}{36}$.

6. В отделе работают 10 сотрудников. Самому высокооплачиваемому сотруднику повысили зарплату на 12 900 рублей, а самому низкооплачиваемому понизили на 2 100 рублей.

а) Как изменилась медианная зарплата?

б) Как изменился размах зарплат?

в) Как изменилась средняя зарплата (среднее арифметическое)?

а) Если расположить зарплаты сотрудников по возрастанию, то медианой будет являться полусумма зарплат 5-го и 6-го сотрудников. То есть изменения зарплат 1-го и 12-го не влияют на медиану.

б) Пусть зарплаты 1-го и 12-го были соответственно x и y . Размах: $y - x$.

Тогда после изменения их зарплаты: $x - 2100$ и $y + 12900$. Самый высокооплачиваемый так им и остался. Самый низкооплачиваемый тоже.

Новый размах: $y + 12900 - (x - 2100) = y - x + 15000$. Таким образом видно, что размах увеличился на 15000 рублей.

в) Среднее до изменения: $\frac{x_1+x_2+\dots+x_9+x_{10}}{10}$. После: $\frac{x_1-2100+x_2+\dots+x_9+x_{10}+12900}{10} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_9+x_{10}+10800}{10} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_9+x_{10}}{10} + 1080$. То есть оно увеличилось на 1080 рублей.

Ответ: а) Не изменилась никак; б) увеличился на 15000 руб; в) увеличилась на 1080 руб.

7. Треугольник со сторонами 36, 48, 64 подобен треугольнику со сторонами 18, 24, x . Чему может быть равен x ? (Найти все варианты и доказать, что других нет).

Рассмотрим все варианты пропорциональности сторон (числители неизменны, в знаменателях всевозможные перестановки)

1) $\frac{36}{18} = \frac{48}{24} = \frac{64}{x}$ Отношение равно $\frac{2}{1}$ Отсюда $x = 32$

2) $\frac{36}{18} = \frac{48}{x} = \frac{64}{24}$ Пропорция неверная, т.к. $\frac{36}{18} \neq \frac{64}{24}$

3) $\frac{36}{24} = \frac{48}{18} = \frac{64}{x}$ Пропорция неверная, т.к. $\frac{36}{24} \neq \frac{48}{18}$

4) $\frac{36}{24} = \frac{48}{x} = \frac{64}{18}$ Пропорция неверная, т.к. $\frac{36}{24} \neq \frac{64}{18}$

5) $\frac{36}{x} = \frac{48}{24} = \frac{64}{18}$ Пропорция неверная, т.к. $\frac{48}{24} \neq \frac{64}{18}$

6) $\frac{36}{x} = \frac{48}{18} = \frac{64}{24}$ Отношение равно $\frac{8}{3}$ Отсюда $x = 13,5$

Ответ: 13,5; 32.

8. Высота BH параллелограмма $ABCD$, проведенная к стороне AD , равна 8 и делит эту сторону на отрезки $AH = 6$ и $HD = 7$. Найдите сторону CD и площадь треугольника BCD .

Из прямоугольного треугольника BHA по теореме Пифагора найдем AB :

$$AB = \sqrt{BH^2 + HA^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

В параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому $CD = AB = 10$.

Так же $BC = AD = AH + HD = 6 + 7 = 13$

Проведем высоту DE на сторону BC .

$DE = BH = 8$ как расстояния между двумя параллельными прямыми.

Площадь треугольника BCD равна половине произведения основания на высоту: $\frac{8 \cdot 13}{2} = 52$

Ответ: 10; 52.