Диагностическая работа для поступающих в десятый класс Математической Вертикали

(Демоверсия)

В каждой задаче необходимо записать полное подробное решение

1. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{72}+\sqrt{18}}{\sqrt{162}-\sqrt{128}}$ б) $(\sqrt{21}+2)\sqrt{25-2\sqrt{84}}$

2. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

3. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Ответ дайте в процентах.

4. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 165 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 26 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 18 часов после отплытия из него.

5. Имеются два сосуда, содержащие 10 кг и 16 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 55% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 61% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

6. Постройте график функции: $y=\frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}$

7. Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает его сторону BC в точке E. Найдите площадь параллелограмма ABCD, если BE = 7, EC = 3, а угол ABC = 150°.

8. В трапеции ABCD основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен 60°, сторона AB равна 2. Найдите площадь трапеции.

Решения

1. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{72}+\sqrt{18}}{\sqrt{162}-\sqrt{128}}=\frac{5\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}-8\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$

б) $(\sqrt{21}+2)\sqrt{25-2\sqrt{84}}=(\sqrt{21}+2)\sqrt{25-2\cdot2\cdot\sqrt{21}}=(\sqrt{21}+2)\sqrt{21-2\cdot\sqrt{21}\cdot2+4}=$
$(\sqrt{21}+2)\sqrt{(\sqrt{21}-2)^2}=(\sqrt{21}+2)\cdot|(\sqrt{21}-2)|=(\sqrt{21}+2)(\sqrt{21}-2)=21-4=17$

Ответ: а) 2; б) 17.

2. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Обозначим буквой A событие: к концу дня кофе закончится в первом автомате.
Буквой B событие: к концу дня кофе закончится во втором автомате.
$A\cap B$ - кофе закончится одновременно и в первом, и во втором
$A\cup B$ - кофе закончится хотя бы где-то: или в только в первом, или только во втором; или и там, и там одновременно.
По итогу нам понадобится вероятность события противоположного к событию $A\cup B$

Тогда по условию $P(A)=P(B)=0{,}3.\,P(A\cap B)=0{,}12$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}3+0{,}3-0{,}12=0{,}48$$

Значит, $1-0{,}48=0{,}52$ – вероятность, что кофе останется и в первом, и во втором

Ответ: 0,52.

3. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Ответ дайте в процентах.

Вероятность промаха равна $1-0{,}6=0{,}4$. Откуда, вероятность события, при котором стрелок сначала первые три раза попадает в мишени, а последний раз промахивается: $0{,}6\cdot0{,}6\cdot0{,}6\cdot0{,}4=0{,}0864=8{,}64\%$.

Ответ: 8,64.

4. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 165 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 26 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 18 часов после отплытия из него.

Пусть x км/ч – скорость течения реки.
Тогда скорость по течению: $26 + x$ км/ч, а скорость против течения: $26 - x$ км/ч.
Время, потраченное на путь по течению: $\frac{165}{26+x}$ ч, а время на путь против течения: $\frac{165}{26-x}$ ч
Итоговое время именно в движении составляет $18 - 5 = 13$ ч. Тогда составим уравнение по условию:

$$\frac{165}{26+x} + \frac{165}{26-x} = 13$$

Для решения домножим обе части на $(26 + x)(26 - x)$. ОДЗ: $x \neq \pm 26$

$$165(26 - x) + 165(26 + x) = 13(26 + x)(26 - x)$$
$$165 \cdot 26 - 165x + 165 \cdot 26 + 165x = 13(26^2 - x^2)$$
$$2 \cdot 165 \cdot 26 = 13(26^2 - x^2)$$
$$2 \cdot 165 \cdot 2 = 26^2 - x^2$$

$$x^2 = 26^2 - 4 \cdot 165 = 676 - 660$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ, но число -4 не подходит по смыслу задачи, значит, ответ 4.

Ответ: 4 км/ч.

5. Имеются два сосуда, содержащие 10 кг и 16 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 55% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 61% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

Пусть x – концентрация первого раствора, а y – концентрация второго.
Обозначим за M кг – равные массы растворов, которые слили вместе во втором случае.
Тогда по условию задачи можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} 10x + 16y = (10 + 16) \cdot 0{,}55 \\ Mx + My = (M + M) \cdot 0{,}61 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 10x + 16y = 26 \cdot 0{,}55 \\ Mx + My = 2M \cdot 0{,}61 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 10x + 16y = 14{,}3 \\ x + y = 1{,}22 \end{cases}$$

Домножим второе уравнение на 16 и вычтем из полученного первое уравнение системы:

$$\begin{cases} 10x + 16y = 14{,}3 \\ 16x + 16y = 19{,}52 \end{cases}$$
$$16x + 16y - 10x - 16y = 19{,}52 - 14{,}3$$
$$6x = 5{,}22$$

$$x = 0{,}87$$

Тогда в первом растворе содержится $10 \cdot 0{,}87 = 8{,}7$ кг кислоты.

Ответ: 8,7 кг.

6. Постройте график функции: $y = \frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}$

Разложим квадратный трёхчлен на множители и сократим на $x + 1$ (при условии, что $x \neq -1$)

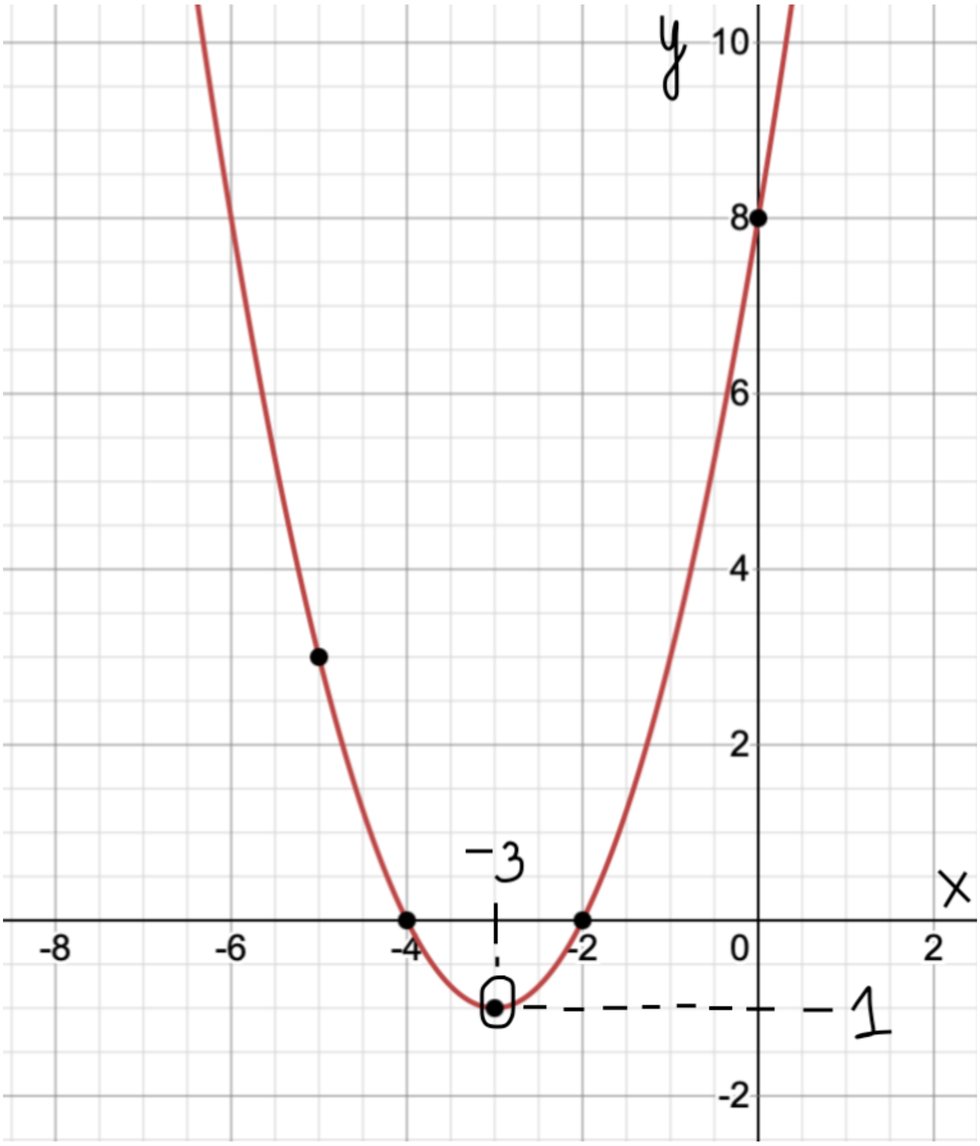
$$y = \frac{(x + 4)(x + 1)(x + 2)}{x + 1}$$

$$\begin{cases} y = (x + 4)(x + 2) \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 6x + 8 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

При $x = -1$ значение функции будет равно -3.

Таким образом, графиком исходной функции является парабола с одной выколотой точкой $(-1;\ 3)$



7. Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает его сторону BC в точке E. Найдите площадь параллелограмма ABCD, если BE = 7, EC = 3, а угол ABC = 150°.

Накрест лежащие углы BEA и EAD равны, AE — биссектриса угла BAD, следовательно, $\angle BEA = \angle EAD = \angle BAE$.

Значит, треугольник BEA равнобедренный и $AB = BE = 7$.
Так же $BC = BE + EC = 7 + 3 = 10$ и $sin\angle ABC = sin 150° = 0.5$

Теперь по формуле площади параллелограмма находим:

$$S = AB \cdot BC \cdot sin\angle ABC = 7 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 35$$

Ответ: 35.

8. В трапеции ABCD основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен 60°, сторона AB равна 2. Найдите площадь трапеции.

Опустим перпендикуляры BH и CK на большее основание AD. По условию $\angle ADC = 60°$, тогда $\angle DCK = 90° - 60° = 30°$.
Катет, лежащий напротив в угла в $30°$ равен половине гипотенузы, тогда $KD = CD/2$.
Так как $AD = 2CD$ по условию, а $HK = BC = CD$, то

$$AH = 2CD - CD - CD/2 = KD$$

Треугольники ABH и DCK равны по двум катетам, следовательно, трапеция $ABCD$ — равнобедренная. Таким образом, $\mathrm{AB} = 2$, $AD = 4$, $BH = ABsinBAD = \sqrt{3}$. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, следовательно

$$S = \frac{4+2}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Ответ: $3\sqrt{3}$