Диагностическая работа для поступающих в одиннадцатый класс Математической Вертикали

(Демоверсия)

В каждой задаче необходимо записать полное подробное решение

1. Найдите значение выражения: $0{,}0016^{-\frac{3}{4}} - 0{,}04^{-\frac{1}{2}} + 0{,}216^{-\frac{2}{3}}$

2. Решите уравнение: $15x^3 + 32x^2 - 4x - 16 = 0$

3. Решите неравенство: $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x-6} \leq 0$

4. Найдите обратную функцию к функции $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$. Постройте её график и найдите промежутки монотонности.

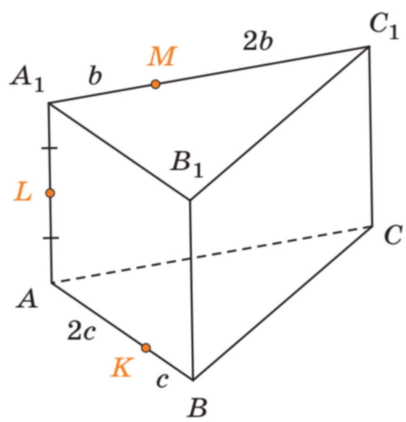
5. У вахтёра в комнате доска с крючками. Всего 12 крючков, а на них 12 ключей. Доска упала, и ключи рассыпались. Вахтер собрал ключи и развесил их в случайном порядке. Какова вероятность того, что хотя бы один ключ висит не на своём крючке?

6. В ящике 6 жёлтых и 4 красных флажка. Наудачу извлекаются четыре флажка. Какова вероятность того, что ровно два из них жёлтые?

7. На рёбрах A_1C_1, AB, AA_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки M, K и L.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, K и L. Опишите алгоритм построения.

б) Определите, в каком отношении плоскость (MKL) делит ребро B_1C_1, если известно, что L – середина AA_1; $A_1M: MC_1 = 1:2$ и $AK: KB = 2:1$



8. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $MN \parallel AC$. Высота BH этого треугольника пересекает отрезок MN в точке K. Известно, что $AM = 4\sqrt{3}$, $MB = 6\sqrt{3}$, $BC = AC = 30$.

а) Найдите длину отрезка BN.

б) Найдите длину отрезка KN.

в) Прямая AK пересекает отрезок BN в точке L. Найдите длину отрезка BL.

Решения

1. Найдите значение выражения: $0{,}0016^{-\frac{3}{4}} - 0{,}04^{-\frac{1}{2}} + 0{,}216^{-\frac{2}{3}}$

$$(\frac{16}{10000})^{-\frac{3}{4}} - (\frac{4}{100})^{-\frac{1}{2}} + (\frac{216}{1000})^{-\frac{2}{3}}$$
$$(\frac{10000}{16})^{\frac{3}{4}} - (\frac{100}{4})^{\frac{1}{2}} + (\frac{1000}{216})^{\frac{2}{3}}$$
$$625^{\frac{3}{4}} - 25^{\frac{1}{2}} + (\frac{10^3}{6^3})^{\frac{2}{3}}$$
$$(5^4)^{\frac{3}{4}} - (5^2)^{\frac{1}{2}} + (\frac{10}{6})^2$$
$$5^3 - 5 + (\frac{5}{3})^2$$
$$125 - 5 + \frac{25}{9}$$
$$120 + 2\frac{7}{9}$$
$$122\frac{7}{9}$$

Ответ: $122\frac{7}{9}$

2. Решите уравнение: $15x^3 + 32x^2 - 4x - 16 = 0$

Подбором находим корень $x = -2$. По теореме Безу можем поделить исходный многочлен на $x - (-2) = x + 2$ без остатка.
В результате деления в столбик получим $15x^3 + 32x^2 - 4x - 16 = (x+2)(15x^2 + 2x - 8)$
Осталось решить квадратное уравнение $15x^2 + 2x - 8 = 0$. Оно имеет два корня

$$x = -\frac{4}{5}; x = \frac{2}{3}$$

Итого у исходного кубического уравнения 3 корня: $x = -2; x = -\frac{4}{5};\ x = \frac{2}{3}$

Отметим, что разложение на множители имеет вид:

$$15x^3 + 32x^2 - 4x - 16 = 15(x+2)\left(x + \frac{4}{5}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Ответ: $-2;\ -\frac{4}{5}; \frac{2}{3}$

3. Решите неравенство: $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x-6} \leq 0$

Разложим на множители оба трёхчлена и применим метод интервалов:

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+2)} \leq 0$$

Ответ: $x \in [-3; -2) \cup [1; 3)$

4. Найдите обратную функцию к функции $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$. Постройте её график и найдите промежутки монотонности.

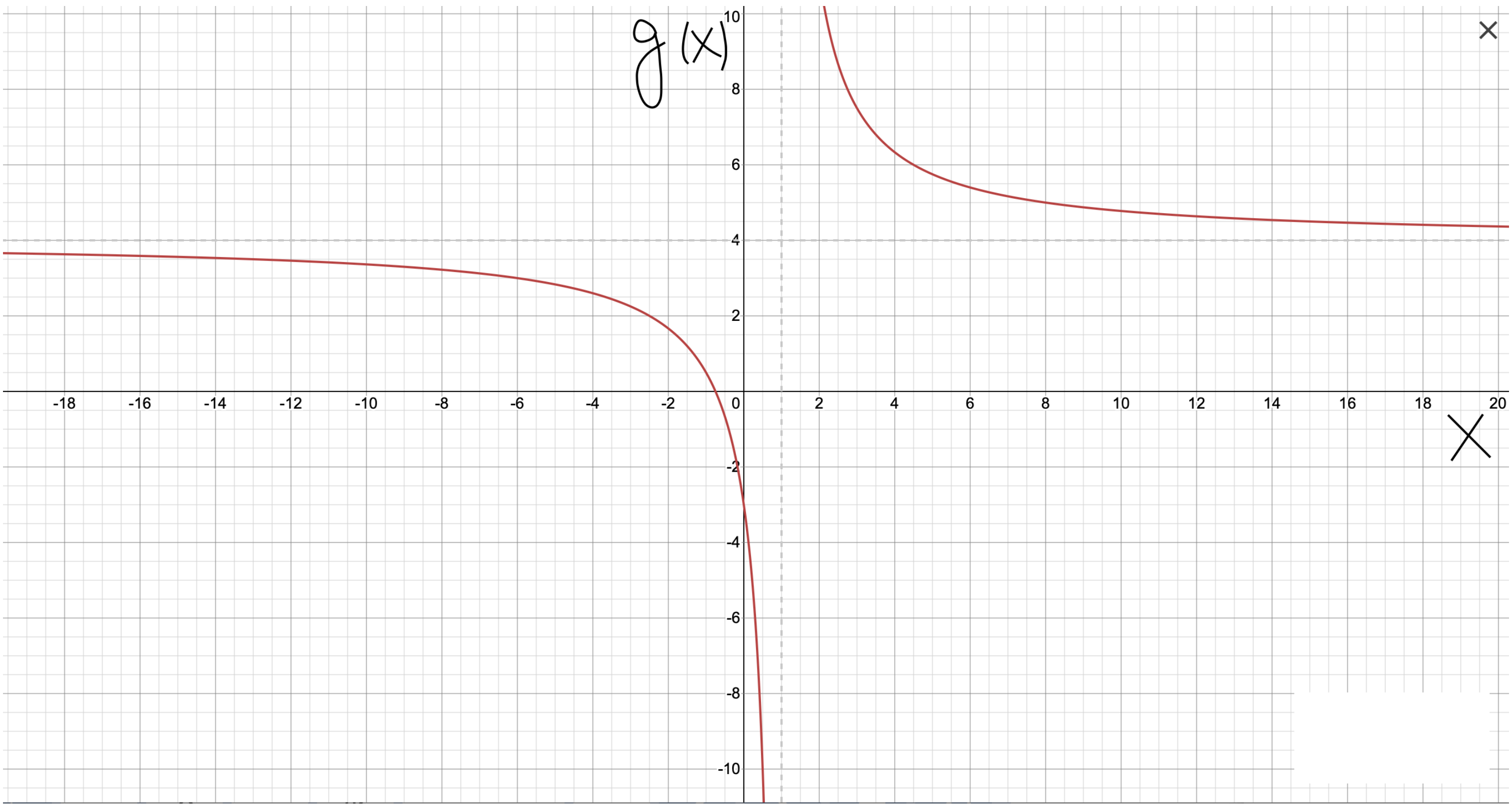
Обозначим $y = \frac{x+3}{x-4}$. Для того, чтобы найти обратную функцию, необходимо в этом равенстве выразить x через y.

$$y(x-4) = x+3$$
$$yx - 4y = x + 3$$
$$yx - x = 4y + 3$$
$$x(y-1) = 4y + 3$$
$$x = \frac{4y+3}{y-1}$$

Таким образом функция $g(x) = \frac{4x+3}{x-1}$ является обратной к $f(x)$. Для построения графика данной функции удобно выделить целую часть (например, поделив в столбик $4x+3$ на $x-1$)

$$g(x) = \frac{4x+3}{x-1} = 4 + \frac{7}{x-1}$$

Вертикальная асимптота $x = 1$, горизонтальная асимптота $y = 4$. Если их провести, то в «новых осях» останется построить график $\frac{7}{x}$



Промежутки монотонности: функция убывает на множестве $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$. Промежутков возрастания у функции нет.

5. У вахтёра в комнате доска с крючками. Всего 12 крючков, а на них 12 ключей. Доска упала, и ключи рассыпались. Вахтер собрал ключи и развесил их в случайном порядке. Какова вероятность того, что хотя бы один ключ висит не на своём крючке?

Посчитаем общее число развесить 12 ключей на 12 крючков. На первый крючок можно повесить любой из 12 ключей, на второй любой из 11 оставшихся, на третий уже любой из 10 оставшихся и так далее. Итого: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 1 = 12!$ способов. И только в одном из них все ключи окажутся на своём месте. То есть $\frac{1}{12!}$ это вероятность того, что все ключи окажутся на своём месте.

Но по условию необходимо найти вероятность противоположного события, то есть вероятность того, что хотя бы один ключ висит не на своём крючке. Она будет равна $1 - \frac{1}{12!}$ Окончательно это число можно уже не считать.

Ответ: $1 - \frac{1}{12!}$

6. В ящике 6 жёлтых и 4 красных флажка. Наудачу извлекаются четыре флажка. Какова вероятность того, что ровно два из них жёлтые?

При извлечении 4 флажков из 10 должно оказаться 2 жёлтых и остальные 2 красных.

Для решения задачи используем число сочетаний $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, показывающее число способов вытащить k предметов из n, причем порядок не важен.

C_{10}^4 – общее число способов вытащить 4 флажка из 10 возможных. $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$
C_6^2 – общее число способов вытащить 2 жёлтых из 6 жёлтых флажков. $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$
C_4^2 – общее число способов вытащить 2 красных из 4 красных флажков. $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$

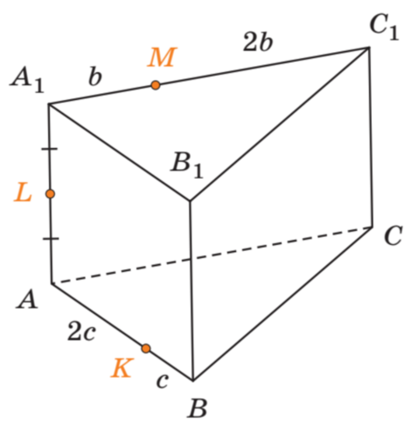
Итоговая вероятность: $\frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{15 \cdot 6}{210} = \frac{3}{7}$

Ответ: $\frac{3}{7}$

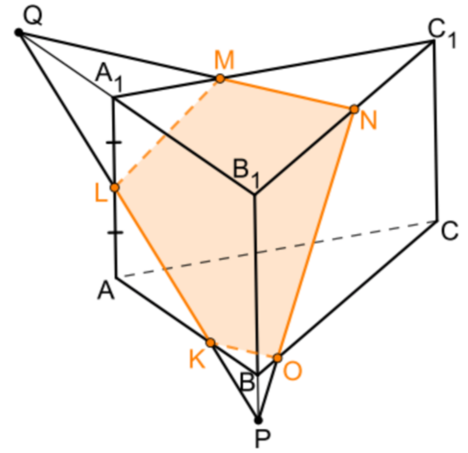
7. На рёбрах A_1C_1, AB, AA_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки M, K и L.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, K и L. Опишите алгоритм построения.

б) Определите, в каком отношении плоскость (MKL) делит ребро B_1C_1, если известно, что L – середина AA_1; $A_1M : MC_1 = 1 : 2$ и $AK : KB = 2 : 1$



а) Построение сечения:



В грани ABB_1A_1 проведём прямую LK до пересечения с прямыми BB_1 и A_1B_1 в точках P и Q соответственно.

В грани $A_1B_1C_1$ проведём прямую QM до пересечения с ребром B_1C_1 в точке N.

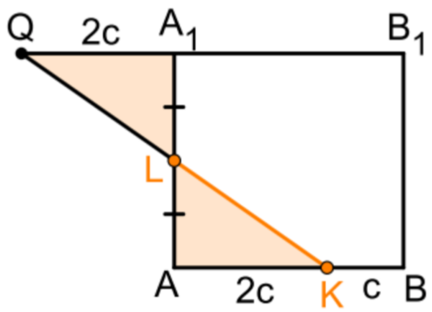
В грани BCC_1B_1 проведём прямую NP до пересечения с ребром BC в точке O.

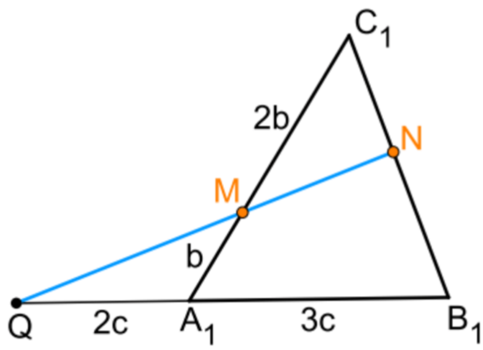
Сечение $KLMNO$ — искомое.

б) Подсчет отношения:

В плоскости (ABB_1A_1) треугольники LAK и LA_1Q образуют положение «песочные часы», то есть они подобны. Из пропорциональности сторон можно найти: $A_1Q = \frac{A_1L}{LA}AK = 2c$

(Более того, эти треугольники равны, но в общем случае такое встречается реже, поэтому здесь использовано подобие)





В плоскости $(A_1B_1C_1)$ применим для треугольника $A_1B_1C_1$ и секущей QMN теорему Менелая:

$$\frac{A_1M}{MC_1} \cdot \frac{C_1N}{NB_1} \cdot \frac{B_1Q}{QA_1} = 1$$

Откуда можно найти: $C_1N : NB_1 = \frac{QA_1}{B_1Q} \cdot \frac{MC_1}{A_1M} = \frac{2b}{b} \cdot \frac{2c}{5c} = 4:5$

Ответ: $4:5$

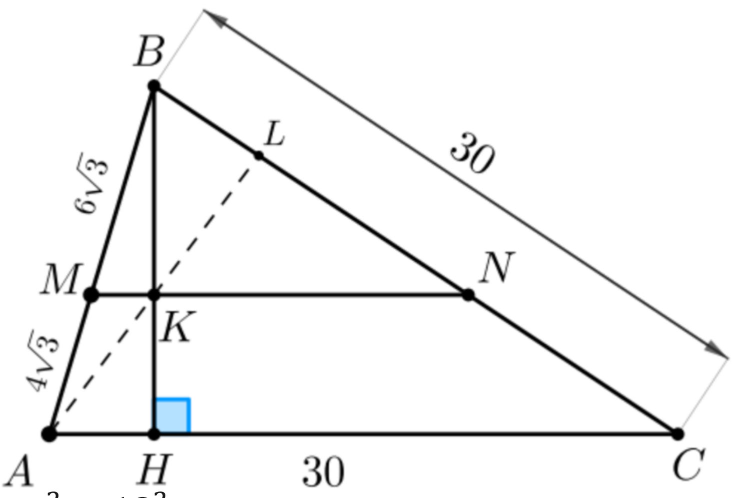
8. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $MN \parallel AC$. Высота BH этого треугольника пересекает отрезок MN в точке K. Известно, что $AM = 4\sqrt{3}$, $MB = 6\sqrt{3}$, $BC = AC = 30$.

а) Найдите длину отрезка BN.

б) Найдите длину отрезка KN.

в) Прямая AK пересекает отрезок BN в точке L. Найдите длину отрезка BL.

а) Треугольники MBN и ABC подобны по двум углам. Значит, $\frac{BN}{BC} = \frac{BM}{BA} = \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}+4\sqrt{3}} = \frac{3}{5}$. Отсюда $BN = BC \cdot \frac{3}{5} = 30 \cdot \frac{3}{5} = 18$. Аналогично находится $MN = AC \cdot \frac{3}{5} = 30 \cdot \frac{3}{5} = 18$



б) Обозначим длину KN за x. Тогда $MK = 18 - x$. Так как $MN || AC$, то $\angle BKN = \angle BHC = 90°$.
Значит, треугольники MKB и NKB прямоугольные и для них можно записать теорему Пифагора:

$$BK^2 + (18 - x)^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2$$

$$BK^2 + x^2 = 18^2$$

Выразим BK^2 из обоих уравнений и приравняем результаты:

$$\left(6\sqrt{3}\right)^2 - (18 - x)^2 = 18^2 - x^2$$

Решая полученное квадратное уравнение, найдём: $x = 15$

в) Для нахождения BL применим для треугольника MBN и секущей AKL теорему Менелая:

$$\frac{NK}{KM} \cdot \frac{MA}{AB} \cdot \frac{BL}{LN} = 1$$

Отсюда находим: $\frac{BL}{LN} = \frac{AB}{MA} \cdot \frac{MK}{KN} = \frac{10\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{18-15}{15} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$

Значит, если $BL = y$, то $LN = 2y$ и $BN = BL + LN = y + 2y = 3y = 18$.
Следовательно, $y = 6$.

Ответ: а) 18; б) 15; в) 6.